Colles de Maths - semaine 10
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

— Équivalents en zéro : $\sin x$, $\ln(1+x)$, $1-\cos x$, $\tan x$, e^x-1, $\arctan x$, $\operatorname{ch} x - 1$, $\operatorname{sh} x$, $(1+x)^\alpha - 1$.
— Formule de Stirling
— Équivalent en $+\infty$ des $\binom{n}{k}$

Analyse asymptotique

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que la suite $(x_n - n\pi)$ est croissante est majorée, déterminer sa limite.
3. Donner un développement asymptotique à l'ordre $\dfrac{1}{n}$ de $x_n - n\pi$.

Exercice 2

1. Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions strictement positives notées u_n et v_n (avec $u_n < v_n$) pour n assez grand.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Trouver sa limite l.
3. Montrer que $u_n - l \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique racine positive notée x_n. Montrer que la suite $(x_n)_n$ possède une limite l. Donner l.
2. On pose $x_n = l - \epsilon_n$. Calculer la limite de $(n\epsilon_n)$.
3. Trouver la limite de $\left(\dfrac{\ln n}{n\epsilon_n}\right)_n$.
4. En déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 4

1. (*Théorème de Cesàro*) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Monter que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \to l$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^\alpha}$. Étudier la suite (u_n) et donner un équivalent de u_n.
Indication : On pourra considérer $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5

1. (*Théorème de Cesàro*) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Monter que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \to l$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\, e^{-u_{n+1}} \leq u_{n+1} - u_n \leq e^{-u_n}.$$
Étudier (u_n) et montrer que $u_n = \ln n + o(1)$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Étudier (u_n) et montrer que $u_n = \ln n + o(1)$.

Révision sur la continuité

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est infini.

Exercice 7 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, telle que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\to} l < 1$. Montrer que f admet un point fixe.